COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 5 heures

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on désigne par $\mathfrak{M}_n(\mathbf{R})$ (respectivement $\mathfrak{M}_n(\mathbf{C})$) l'espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ (respectivement sur $\mathbf{C}$) des matrices carrées d'ordre n à éléments réels (respectivement complexes). On munit $\mathfrak{M}_n(\mathbf{C})$ de la norme :

$$\|A\| = \sup_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} |a_{ij}|, \qquad \text{où} \qquad A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}};$$

la restriction de cette norme à $\mathfrak{M}_n(\mathbf{R})$ est une norme sur $\mathfrak{M}_n(\mathbf{R})$.

On dit qu'une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbf{R})$ est *diagonalisable dans* $\mathfrak{M}_n(\mathbf{R})$ s'il existe une matrice inversible $Q \in \mathfrak{M}_n(\mathbf{R})$ telle que la matrice $D = Q^{-1}AQ$ soit diagonale.

I

Dans cette partie, on considère p matrices $A_1, A_2, \ldots, A_p$ de $\mathfrak{M}_2(\mathbf{R})$, $p \geqslant 2$, telles que pour tout $t = (t_1, \ldots, t_p) \in \mathbf{R}^p$, la matrice

$$A(t) = t_1 A_1 + t_2 A_2 + \cdots + t_p A_p$$

soit diagonalisable dans $\mathfrak{M}_2(\mathbf{R})$.

1. Montrer que chaque matrice A_j est diagonalisable dans $\mathfrak{M}_2(\mathbf{R})$.

Soit $Q_1 \in \mathfrak{M}_2(\mathbf{R})$ tel que :

$$D_1 = Q_1^{-1} A_1 Q_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \mu_1 \end{pmatrix};$$

on note :

$$B_2 = Q_1^{-1} A_2 Q_1 = \begin{pmatrix} b_1 & b_3 \\ b_4 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Jusqu'au 4. inclus, on suppose $\lambda_1 \neq \mu_1$.

2. *a.* Montrer qu'il existe $(t_1, t_2) \in \mathbf{R}^2$ tel que :

$$t_2 \neq 0 \qquad \text{et} \qquad t_1 \lambda_1 + t_2 b_1 = t_1 \mu_1 + t_2 b_2.$$

b. Montrer que $b_3 = 0$ équivaut à $b_4 = 0$.

Jusqu'au 4. inclus, on suppose $b_3 b_4 \neq 0$.

c. Montrer que b_3 et b_4 sont de même signe.

Jusqu'au 4. inclus, on suppose $p \geqslant 3$.

3. On pose :

$$d = \sqrt{\frac{b_3}{b_4}}, \qquad D = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad Q = Q_1 D.$$

Pour $j = 1, 2, 3$ on note $C_j = Q^{-1} A_j Q$.

a. Calculer C_1 et C_2.

b. On note $C_3 = Q^{-1} A_3 Q = \begin{pmatrix} c_1 & c_3 \\ c_4 & c_2 \end{pmatrix}$. Pour tout

$$t = (t_1, t_2, t_3, t_4) \in \mathbf{R}^4,$$

on pose :

$$C(t) = t_1 C_1 + t_2 C_2 + t_3 C_3 + t_4 I = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) & \gamma_3(t) \\ \gamma_4(t) & \gamma_2(t) \end{pmatrix}$$

où

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que pour tout $(t_2, t_3) \in \mathbf{R}^2$, il existe $(t_1, t_4) \in \mathbf{R}^2$ tel que $\gamma_1(t) = \gamma_2(t) = 0$.

c. En déduire que $c_3 = c_4$.

4. Établir que *quelles que soient* $A_1, \ldots, A_p \in \mathfrak{M}_2(\mathbf{R})$ telles que pour tout $t = (t_1, \ldots, t_p) \in \mathbf{R}^p$, la matrice $A(t) = t_1 A_1 + \cdots + t_p A_p$ soit diagonalisable dans $\mathfrak{M}_2(\mathbf{R})$, il existe une matrice inversible $Q \in \mathfrak{M}_2(\mathbf{R})$ telle que les matrices $Q^{-1} A_1 Q, \ldots, Q^{-1} A_p Q$ soient toutes symétriques.

Tournez la page S.V.P.

II

1. Prouver que pour tout couple de matrices $(B, C) \in (\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}))^2$, on a :

$$\|BC\| \leqslant n\|B\|\,\|C\|.$$

Dans toute la suite de cette partie, A *désigne une matrice de* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ $(n \geqslant 2)$. On note I la matrice de l'application identité de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

2. *On suppose* A *diagonalisable dans* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Soit Q une matrice inversible à éléments réels telle que $D = Q^{-1}AQ$ soit diagonale.

   a. Montrer que $D - zI$ est inversible dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

   b. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, on a :

$$|\mathrm{Im}\, z|\, \|(D - zI)^{-1}\| \leqslant 1.$$

   c. Établir que A vérifie la condition (Γ) suivante :

(Γ) Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, la matrice $A - zI$ est inversible, et il existe $K > 0$ tel que $(\forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) : |\mathrm{Im}\, z|\, \|(A - zI)^{-1}\| \leqslant K$.

3. *On suppose que* A *vérifie la condition* (Γ).

   a. Montrer que toutes les valeurs propres de A sont réelles.

   b. Soit k un entier $\geqslant 2$, et soit J la matrice carrée d'ordre k définie par :

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

   où λ est un nombre réel. Montrer que $|\mathrm{Im}\, z|\, \|(J - zI)^{-1}\|$ n'est pas borné quand z décrit $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

   c. On *admet* que si A n'est pas diagonalisable, il existe une matrice carrée inversible Q d'ordre n, un nombre complexe λ, un entier $k \geqslant 2$ et une matrice carrée M d'ordre $n - k$ tels que :

$$Q^{-1}AQ = \left(\begin{array}{c|c} J & 0 \\ \hline 0 & M \end{array}\right) \quad \text{où J est la matrice définie ci-dessus.}$$

   Montrer que si A vérifie la condition (Γ), alors A est diagonalisable dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

4. *On suppose de nouveau* A *diagonalisable dans* $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell$ les valeurs propres distinctes de A, et $E_1, \ldots, E_\ell$ les sous-espaces propres de $\mathbb{R}^n$ qui leur sont associés ; pour tout $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ on désigne par p_i la projection sur E_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} E_j$, et par P_i la matrice de p_i.

   a. Exprimer I et A en fonction de $P_1, \ldots, P_\ell$.

   b. Soit $G = {}^tP_1 P_1 + \cdots + {}^tP_\ell P_\ell$. Montrer que G est la matrice d'une forme quadratique définie positive.

   c. Calculer G A en fonction de $P_1, \ldots, P_\ell$.

   d. Établir que A vérifie la condition (Σ) suivante :

(Σ) Il existe deux matrices symétriques réelles R et S telles que les valeurs propres de R soient strictement positives et $A = RS$.

5. *On suppose que* A *vérifie la condition* (Σ).

   a. Prouver qu'il existe une matrice symétrique inversible H telle que $H^2 = R$.

   b. Calculer $H^{-1}AH$ et en déduire que A est diagonalisable dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

III

Soient $A_1, \ldots, A_p$ des matrices carrées d'ordre $n \geqslant 2$ à éléments réels. À tout $t = (t_1, \ldots, t_p) \in \mathbb{R}^p$ on associe la matrice $A(t) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $A(t) = t_1 A_1 + \cdots + t_p A_p$. Soit I la matrice de l'application identité de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

On introduit les conditions (C I), (C II), (C III) et (C IV) suivantes :

(C I) Il existe $C_1 > 0$, et pour tout $t \in \mathbb{R}^p$, il existe une matrice inversible $Q(t) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $D(t) = Q(t)^{-1} A(t) Q(t)$ soit diagonale, et

$$(\forall t \in \mathbb{R}^p) \quad \|Q(t)\| \leqslant C_1, \quad \|Q(t)^{-1}\| \leqslant C_1.$$

(C II) Pour tout $t \in \mathbb{R}^p$ et tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, la matrice $A(t) - zI$ est inversible ; de plus, il existe $C_2 > 0$ telle que :

$$(\forall t \in \mathbb{R}^p, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R})\, |\mathrm{Im}\, z|\, \|(A(t) - zI)^{-1}\| \leqslant C_2.$$

Tournez la page S.V.P.

(C III) Il existe $C_3 > 0$, et pour tout $t \in \mathbf{R}^p$, il existe deux matrices symétriques réelles $R(t)$ et $S(t)$ telles que les valeurs propres de $R(t)$ soient strictement positives, que $A(t) = R(t)\,S(t)$, et
$(\forall\, t \in \mathbf{R}^p)\ \|R(t)\| \leqslant C_3, \qquad \|R(t)^{-1}\| \leqslant C_3$.

(C IV) La matrice $A(t)$ est diagonalisable dans $\mathfrak{M}_n(\mathbf{R})$ pour tout $t \in \mathbf{R}^p$.

1. Prouver que (C I) implique (C II).

2. On suppose (C II) vérifiée. Pour $t \in \mathbf{R}^p$ fixé et $A = A(t)$, on reprend les notation de la partie II.

   a. Calculer $(A - zI)^{-1}$ en fonction de $P_1, \ldots, P_\ell$ et en déduire que, pour tout $k \in \{1, \ldots, \ell\}$, on a :

$$(\forall\, z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}) \quad \|P_k\| \leqslant |\lambda_k - z| \left[\|(A - zI)^{-1}\| + \sum_{j \neq k} \frac{1}{|\lambda_j - z|} \|P_j\| \right].$$

   b. En posant $z = \lambda_k + i\varepsilon$, $\varepsilon \neq 0$, et en faisant tendre ε vers 0, en déduire que $\|P_k\| \leqslant C_2$.

   c. Trouver une constante $C_3' > 0$ ne dépendant que de n et C_2 telle que $\|R^{-1}\| \leqslant C_3'$.

   d. Soient $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire usuel dans $\mathbf{R}^n$ et $[\ ]$ la norme associée. Établir que pour tout $x \in \mathbf{R}^n$ on a :

$$[x]^2 \leqslant \ell \sum_{j=1}^{\ell} [p_j(x)]^2 \leqslant \ell\, [x]\, [g(x)]$$

   où g est l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ de matrice G.

   e. En déduire qu'il existe une constante $C_3'' > 0$ ne dépendant que de n telle que $\|R\| \leqslant C_3''$.

   f. Prouver que (C II) implique (C III).

3. *a.* Montrer que pour toute matrice symétrique K on a :

$$\frac{1}{n^2} \|K\| \leqslant \sup_j |\mu_j| \leqslant n^2 \|K\|$$

   où $\mu_1, \ldots, \mu_n$ sont les valeurs propres de K.

   b. Prouver que (C III) implique (C I).

4. *a.* On suppose $n = 2$. Prouver que (C I) est équivalente à (C IV).

   b. Soient :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Montrer que $t_1 A_1 + t_2 A_2$ est diagonalisable dans $\mathfrak{M}_3(\mathbf{R})$ pour tout $(t_1, t_2) \in \mathbf{R}^2$.

   c. En utilisant l'exemple précédent, montrer que la condition (C IV) n'est pas équivalente à (C I) pour $n \geqslant 3$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail